УДК 514.76

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МАКСИМАЛЬНО ПОДВИЖНЫХ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

Н.А. Тяпин

Аннотация

В статье исследуется специальный класс максимально подвижных почти контактных метрических многообразий $M^{2n+1}(\eta, \xi, \Phi, g)$. В специальной системе координат выписаны компоненты структурных объектов, найдены базисные поля алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов данной структуры.

Ключевые слова: почти контактное метрическое многообразие, алгебра Ли, инфитезимальный автоморфизм.

Введение

Пусть M – гладкое многообразие размерности $2n+1$, η – дифференциальная 1-форма. Форма η определяет на M контактную структуру, если выполняется следующее условие [1]:

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0,$$

то есть $\Omega = \eta \wedge (d\eta)^n$ является формой объема. Естественным обобщением контактных структур являются почти контактные структуры.

Почти контактная метрическая структура на гладком многообразии M^{2n+1} определяется четверкой тензорных полей: векторным полем ξ, называемым характеристическим; дифференциальной 1-формой η; тензорным полем Φ типа $(1,1)$, называемым структурным эндоморфизмом; римановым метрическим тензором g. Эти объекты должны удовлетворять следующим условиям [1]:

$$\eta(\xi) = 1, \quad \Phi\xi = 0, \quad \eta(\Phi X) = 0, \quad \Phi\Phi X = -X + \eta(X)\xi, \tag{1}$$

$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

для любых векторных полей X, Y на M.

Векторное поле v называется инфинитезимальным автоморфизмом почти контактной метрической структуры, если выполняются следующие условия:

$$L_v\xi = 0, \quad L_v\eta = 0, \quad L_v\Phi = 0, \quad L_v g = 0, \tag{2}$$

где L_v – производная Ли вдоль векторного поля v.

Вопрос о максимальной подвижности почти контактных метрических структур решен С. Танно [2]:

Теорема 1. *Пусть M^{2n+1} – связное почти контактное риманово многообразие. Тогда максимальная размерность группы автоморфизмов почти контактной метрической структуры равна $(n+1)^2$. Максимум будет достигаться, если* *и только если секционная кривизна в направлении двумерных площадок, содержащих вектор ξ, будет постоянной, равной C, и M является одним из следующих пространств:*

1) $C > 0$: однородное Сасакиево многообразие (или его ε-деформация) постоянной φ-аналитической кривизны H;

2) $C = 0$: 6 глобальных римановых произведений: $T \times CP^n$, $T \times CE^n$, $T \times CD^n$, $L \times CP^n$, $L \times CE^n$, $L \times CD^n$;

3) $C < 0$: прямое произведение $L \times_{ct} CE^n$ с метрикой $g_{(t,x)} = (dt)^2_{(t)} + e^{2ct} G_{(x)}$

В принятых обозначениях L – прямая, T – окружность, CP^n – комплексное проективное пространство с метрикой Фубини–Штуди, CE^n – унитарное пространство, CD^n – открытый шар с однородной кэлеровой структурой отрицательной постоянной голоморфной секционной кривизны.

В дальнейшем будем полагать, что индексы меняются следующим образом:

$$i, j, k, \ldots = 1, \ldots, n, \quad a, b, s, \ldots = 1, \ldots, 2n, \quad A, B, S, \ldots = 1, \ldots, 2n+1.$$

Рассмотрим 3-й класс максимально подвижных почти контактных метрических структур теоремы Танно [2]. На многообразии $L \times_{ct} CE^n$ введем локальные координаты $x = \{x^1, \ldots, x^{2n}\}, t = x^{2n+1}$. Координаты $\{x^1, \cdot, x^{2n}\}$ выберем естественным для унитарного пространства CE^n образом. Тогда $\Phi \mid_{CE^n} = \delta^i_j \partial_{i+n} \otimes dx^j - \delta^i_j \partial_i \otimes dx^{j+n}$, $G = \delta_{ab} dx^a dx^b$. Пусть $\mathbb{L}$ и $\mathbb{M}$ – распределения, соответствующие слоям CE^n и L. Из доказательства теоремы [2] следует, что они являются соответственно первым и вторым фундаментальными распределениями почти контактной метрической структуры. Распределение $\mathbb{L}$ натянуто на векторные поля $\partial_1, \ldots, \partial_{2n}$, а $\mathbb{M}$ – на векторное поле ∂_{2n+1}. Так как $\mathbb{L} = \ker(\eta)$ и $\mathbb{M}$ – линейная оболочка ξ, учитывая первое условие из (1), получим что $\eta = \lambda dx^{2n+1}$, $\xi = \dfrac{1}{\lambda}\partial_{2n+1}$. Используя вид g и пятое условие условие (1), находим $\lambda = 1$. Отсюда следует, что в выбранной нами локальной системе координат структурные объекты имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi = \partial_{2n+1}, \qquad \eta = dx^{2n+1}, \\ g = e^{2cx^{2n+1}} \delta_{ab} dx^a dx^b + {dx^{2n+1}}^2, \\ \Phi = \delta^i_j \partial_{i+n} \otimes dx^j - \delta^i_j \partial_i \otimes dx^{j+n}. \end{aligned} \tag{3}$$

Нетрудно проверить, что условия (1) выполняются.

1. Система дифференциальных уравнений

Найдем векторное поле инфинитезимального автоморфизма v структуры (3). Условия (2) представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно неизвестных функций $v^A = v^A(x^1, \ldots, x^{2n}, x^{2n+1})$. Запишем эти условия для структурных объектов (η, ξ, Φ, g):

Для векторного поля ξ имеем:

$$L_v \xi \equiv v^S \partial_S \xi^A - \xi^S \partial_S v^A = 0 \;\Leftrightarrow\; \partial_{2n+1} v^A = 0. \tag{4}$$

Для дифференциальной 1-формы η находим:

$$L_v \eta \equiv v^S \partial_s \eta_B + \eta_S \partial_B v^S = 0 \;\Leftrightarrow\; \partial_B v^{2n+1} = 0. \tag{5}$$

Для структурного эндоморфизма Φ имеем:

$$L_v \Phi \equiv v^S \partial_S \Phi^A_B - \Phi^S_B \partial_S v^A + \Phi^A_S \partial_B v^S = 0.$$

Запишем последнее равенство для различных серий индексов:

$$
\begin{array}{ll}
1.\ \partial_{j+n}v^i+\partial_j v^{i+n}=0, & 2.\ -\partial_{j+n}v^{i+n}+\partial_j v^i=0,\\
3.\ -\partial_j v^i+\partial_{j+n}v^{i+n}=0, & 4.\ \partial_j v^{i+n}+\partial_{j+n}v^i=0,\\
5.\ \partial_{2n+1}v^a=0, & 6.\ \partial_b v^{2n+1}=0.
\end{array}
\tag{6}
$$

Для метрического тензора g из системы (2) находим:

$$L_v g\equiv v^s\partial_S g_{AB}+g_{AS}\partial_B v^s+g_{SB}\partial_A v^s=0.$$

Запишем данное равенство для различных серий индексов:

$$
1.\ \begin{cases} cv^{2n+1}+\partial_a v^a &=0,\\ \partial_b v^a+\partial_a v^b &=0\quad (a>b),\end{cases}
\tag{7}
$$

$$2.\ e^{2cx^{2n+1}}\partial_{2n+1}v^a+\partial_a v^{2n+1}=0, \tag{8}$$

$$3.\ \partial_{2n+1}v^{2n+1}=0. \tag{9}$$

Исключая из уравнений (4)–(9) одинаковые, получаем следующую систему:

$$
\begin{cases}
\partial_{2n+1}v^A=0,\\
\partial_B v^{2n+1}=0,\\
\partial_{j+n}v^i+\partial_j v^{i+n}=0,\\
-\partial_{j+n}v^{i+n}+\partial_j v^i=0,\\
cv^{2n+1}+\partial_a v^a=0,\\
\partial_b v^a+\partial_a v^b=0,\quad a>b.
\end{cases}
\tag{10}
$$

2. Решение СДУ

Из первой серии уравнений (10) следует, что функции $v^A = v^A(x^1,\dots,x^{2n},x^{2n+1})$ не зависят от переменной x^{2n+1}. Из второй серии уравнений (10) следует, что функция $v^{2n+1}=v^{2n+1}(x^1,\dots,x^{2n},x^{2n+1})$ не зависит ни от одной из переменных, то есть является константой, которую мы обозначим C_0^{2n+1}:

$$v^a=v^a(x^1,\dots,x^{2n}),\quad v^{2n+1}=C_0^{2n+1}. \tag{11}$$

С учетом (11) система дифференциальных уравнений (10) примет вид:

$$
\begin{cases}
\partial_{j+n}v^i+\partial_j v^{i+n}=0,\\
-\partial_{j+n}v^{i+n}+\partial_j v^i=0,\\
cC_0^{2n+1}+\partial_a v^a=0,\\
\partial_b v^a+\partial_a v^b=0,\quad a>b.
\end{cases}
\tag{12}
$$

Дифференцируя третье уравнение системы (12) по x^c, получим, что

$$\partial_{ac}v^a=0. \tag{13}$$

Рассмотрим четвертое уравнение системы (12). Для простоты будем считать, что индексы удовлетворяют лишь условиям $a\neq b\neq c$. Дифференцируя его по x^c, получим

$$\partial_{ac}v^b+\partial_{bc}v^a=0,\quad a\neq b\neq c. \tag{14}$$

Аналогично, дифференцируя равенство $\partial_c v^b + \partial_b v^c = 0$ по x^a, имеем

$$\partial_{ac} v^b + \partial_{ab} v^c = 0, \quad a \neq b \neq c. \tag{15}$$

В силу того, что $\partial_a v^b = -\partial_b v^a$, перепишем (15) в виде

$$\partial_{ac} v^b - \partial_{bc} v^a = 0, \quad a \neq b \neq c. \tag{16}$$

Складывая (14)и (16) и учитывая (13), получим, что:

$$\partial_{ab} v^c = 0.$$

Мы получили, что все вторые частные производные функций (11) равны нулю. Отсюда следует, что они линейны по всем своим аргументам и могут быть записаны в виде

$$v^a = C^a_b x^b + C^a_0, \quad v^{2n+1} = C^{2n+1}_0. \tag{17}$$

Компоненты векторного поля инфинитезимального автоморфизма зависят от $4n^2 + 2n + 1$ постоянных, которые не являются независимыми. Используя систему (12), найдем алгебраические зависимости, накладываемые на постоянные C^a_b, C^a_0, C^{2n+1}_0.

Подставив (17) в (12), получим:

$$\begin{cases} C^i_{j+n} + C^{i+n}_j = 0, \\ C^i_j - C^{i+n}_{j+n} = 0, \\ cC^{2n+1}_0 + C^a_a = 0, \\ C^a_b + C^b_a = 0, \quad a > b. \end{cases} \tag{18}$$

Используя условия (18), можно выразить коэффициенты C^a_b через C^i_j, $i < j$, и C^i_{j+n}, $i \leq j$. Получим:

$$\begin{gathered} C^j_i = -C^i_j, \quad C^{i+n}_{j+n} = C^i_j, \quad C^{j+n}_{i+n} = C^j_i = -C^i_j, \quad C^a_a = -cC^{2n+1}_0, \\ C^{j+n}_i = -C^i_{j+n}, \quad C^{i+n}_j = -C^i_{j+n}, \quad C^j_{i+n} = -C^{i+n}_j = C^i_{j+n}, \end{gathered} \tag{19}$$

где $i < j$.

Таким образом, из (19) следует, что среди всех $4n^2$ коэффициентов C^a_b независимыми являются только n^2. Примем в качестве независимых переменных $C^i_j (i < < j)$ и $C^i_{j+n} (i \leq j)$. Тогда общее решение системы (10) можно записать в виде:

$$v^i = -cC^{2n+1}_0 x^i + \sum_{j>i} C^i_j x^j - \sum_{j<i} C^i_j x^j + \sum_{j\geq i} C^i_{j+n} x^{j+n} + \sum_{j<i} C^i_{j+n} x^{j+n},$$

$$v^{i+n} = -\sum_{j\geq i} C^i_{j+n} x^j - \sum_{j<i} C^i_{j+n} x^j + \sum_{j>i} C^i_j x^{j+n} - \sum_{j<i} C^i_j x^{j+n} - cC^{2n+1}_0 x^{i+n},$$

$$v^{2n+1} = C^{2n+1}_0.$$

Базисные операторы алгебры инфинитезимальных автоморфизмов максимально подвижной почти контактной метрической структуры, определяемой равенствами (3), имеют вид:

$$\begin{cases} C^i_j \ (i < j): & x^j \partial_i - x^i \partial_j + x^{j+n} \partial_{i+n} - x^{i+n} \partial_{j+n}, \\ C^i_{j+n} \ (i < j): & x^{j+n} \partial_i + x^{i+n} \partial_j - x^j \partial_{i+n} - x^i \partial_{j+n}, \\ C^i_{i+n}: & x^{i+n} \partial_i - x^i \partial_{i+n}, \\ C^a_0: & \partial_a, \\ C^{2n+1}_0: & cx^a \partial_a - \partial_{2n+1}. \end{cases} \tag{20}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Существует система координат, в которой структурные объекты и базисные операторы алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов максимально подвижных почти контактных метрических многообразий третьего класса Танно имеют вид* (3) *и* (20).

Summary

N.A. Tyapin. On a Class of Almost Contact Metric Manifolds of Maximal Mobility.

A special class of almost contact metric manifolds $M^{2n+1}(\eta, \xi, \Phi, g)$ of maximal mobility is studied. In terms of a special coordinate system, we calculate the components of the structure objects of M^{2n+1} and find basis vector fields of the Lie algebra of infinitesimal automorphisms of M^{2n+1}.

Key words: almost contact metric manifold, Lie algebra, infinitesimal automorphism.

Литература

1. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. – М.: МПГУ, 2003. – 495 с.

2. *Tanno Shukichi* The automorphism groups of almost contact riemannian manifolds // Tohoku Math. J. – 1969. – V. 21, No 1. – P. 21-38.

Поступила в редакцию
04.06.09

Тяпин Никита Александрович – ассистент кафедры геометрии Пензенского государственного педагогического университета имени В.Г. Белинского.

E-mail: *tyapin_nikita@mail.ru*